제 2 교시　수리 영역

'가'형　성명 ☐　수험번호 ☐☐☐☐☐ 2 ☐☐☐☐

- 먼저 수험생이 선택한 응시 유형의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 응시 유형 및 답을 표기할 때는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $2^x=3$ 일 때, $8^{\frac{x}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\sqrt{3}$
④ 3　⑤ $3\sqrt{3}$

2. 세 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $(A+B)C$ 는? [2점]

① $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}10\\ 3\end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix}$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{4}{3}$
④ 2　⑤ 4

4. 등차수열

$$30,\ 30+\frac{1}{7},\ 30+\frac{2}{7},\ 30+\frac{3}{7},\ \cdots,\ 50$$

의 모든 항의 합은? [3점]

① 5560　② 5600　③ 5640
④ 5680　⑤ 5720

5. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$의 해가 존재하지 않도록 하는 상수 k의 값은? [3점]

① 5 ② $\sqrt{3}$ ③ 1
④ 0 ⑤ -3

6. 번호가 1번, 2번, 3번인 버스가 있다. 이 버스 중에서 세 정류장 S_1, S_2, S_3에 정차하는 버스의 번호를 조사한 결과가 표와 같을 때, 행렬 A의 성분 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3)$을 다음과 같이 정의하자.

정류장	버스번호
S_1	2, 3
S_2	1, 2, 3
S_3	1, 3

$$a_{ij}=\begin{cases} 1\,(i\text{번 버스가 정류장 } S_j\text{에 정차할 때}) \\ 0\,(i\text{번 버스가 정류장 } S_j\text{에 정차하지 않을 때}) \end{cases}$$

이때 행렬 A는? [3점]

① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. 첫째항이 2이고 공비가 $\sqrt{3}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\dfrac{a_{10}-a_9}{S_{10}-S_8}+\dfrac{S_5-S_3}{a_5-a_4}$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ $2\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

8. 모든 항이 양수인 무한수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 모두 만족할 때 a_5의 값은? [4점]

(가) ${a_{n+1}}^2=a_n\,a_{n+2}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2(a_1+a_2)$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=2(a_1+a_3)$

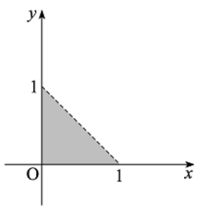
① $\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

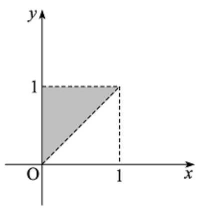
9. 오른쪽 곱셈표에서 어두운 부분에 있는 수들의 총합은? [3점]

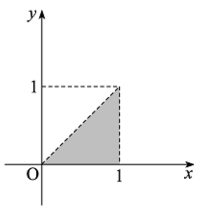
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

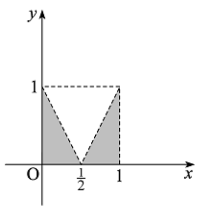
① 1080
② 1155
③ 1240
④ 1325
⑤ 1400

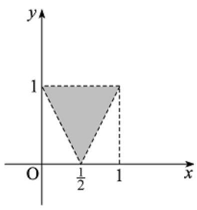
10. 양수 m, n은 정수 부분이 각각 세 자리인 수이고, 두 수의 곱 mn은 정수 부분이 다섯 자리인 수이다. m, n의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 할 때, 좌표평면 위의 점 (x, y)가 나타내는 영역은? (단, 점선 부분은 제외한다.) [4점]

①


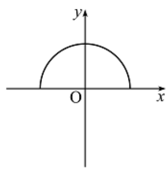
②


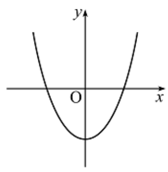
③


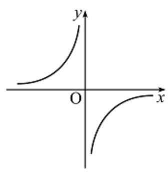
④


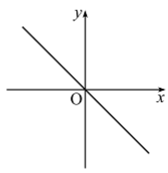
⑤


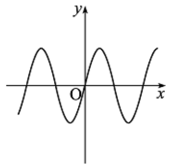
11. 이차정사각행렬 A에 대하여 실수 p, q가 등식 $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 좌표평면 위의 점 $(p,\ q)$를 행렬 A의 고정점이라 하자. 다음 그래프 중에서 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$의 고정점이 나타내는 도형과 만나지 않는 것은? [4점]

①


②


③


④


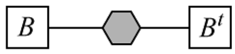
⑤


12. 어떤 볼록다각형의 모든 내각의 크기를 크기순으로 나열하면 등차수열을 이룬다. 가장 작은 내각의 크기는 $63°$이고 공차는 $18°$일 때, 가장 큰 내각의 크기는? [3점]

① $117°$ ② $135°$ ③ $153°$
④ $163°$ ⑤ $171°$

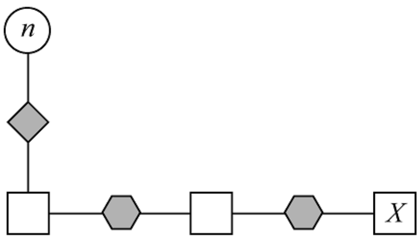
13. 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 a, b, c 인 세 자리 자연수 n 에 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & b+c \end{pmatrix}$ 를 대응시키는 것을 [그림 1]과 같이 나타내자. 그리고 행렬 $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 B^t 를 $B^t=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ 라 할 때 행렬 B 에 행렬 B^t 를 대응시키는 것을 [그림 2]와 같이 나타내자.

[그림 1]



[그림 2]

아래 그림에서 행렬 $X=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ 일 때 자연수 n 의 값은? [3점]



① 179　② 197　③ 719　④ 791　⑤ 971

14. 다음은 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 등식

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ 가 성립함을 증명한 것이다. (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬이다.)

< 증명 >

행렬 $\hat{A}$ 를 $\hat{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 라 하면,

$A+\hat{A}=\boxed{\text{(가)}}$ …㉠

$A\hat{A}=\boxed{\text{(나)}}$ …㉡

㉠의 양변에 A 를 곱하여 정리하면

$A^2+\boxed{\text{(다)}}=O$ …㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$(a+d)A$	$(ad-bc)A$	$(a+d)E-A\hat{A}$
②	$(a+d)A$	$(ad-bc)E$	$(a+d)A-(ad-bc)\hat{A}$
③	$(a+d)E$	$(ad-bc)E$	$(a+d)A-(ad-bc)\hat{A}$
④	$(a+d)E$	$(ad-bc)E$	$A\hat{A}-(a+d)A$
⑤	$(a+d)E$	$(ad-bc)A$	$A\hat{A}-(a+d)A$

15. 양수 a에 대하여 $\log a$의 지표와 가수를 각각 $f(a)$, $g(a)$라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(80)-1=g(80)-3\log 2$

ㄴ. $f(a^2)=2f(a)$ 이면 $f(a^3)=3f(a)$ 이다.

ㄷ. $g(a^2)=g(a)$ 이면 모든 자연수 n에 대하여 $g(a^n)=0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ 이 자연수임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

<증명>

(ⅰ) $n=1$ 일 때 $\frac{1^3}{6}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{3}=1$

(ⅱ) $n=k\ (k\geq 1)$일 때 $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$ 가 자연수라고 가정하자.

$$\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$$
$$=\left(\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}\right)+\frac{\boxed{(가)}}{2}$$

에서 $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$ 가 자연수이고

$\boxed{(가)}$ 는(은) $\boxed{(나)}$ 의 배수이므로

$\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$ 은 자연수이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ 은 자연수이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	$k(k+1)$	2
②	$(k+1)(k+2)$	2
③	$(k+1)(k+2)$	4
④	$(k+2)(k+3)$	2
⑤	$(k+2)(k+3)$	4

17. 등식 $x^2+y^2=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x & y-2 \\ 1 & m \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖기 위한 실수 m의 값의 범위는? [4점]

① $m\leq -\sqrt{2}$ ② $m<-2$ 또는 $m>2$
③ $-2\leq m\leq 1$ ④ $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$
⑤ $m\leq -\sqrt{3}$ 또는 $m\geq\sqrt{3}$

18. 자연수 a, b에 대하여 $\frac{b^2}{a}$은 정수 부분이 여섯 자리인 수이고, $\frac{a^2}{b}$은 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 이때 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\log\frac{b^2}{a}$ 의 가수를 α라 할 때, $10^{\alpha+6}=\frac{b^2}{a}$ 이다.

ㄴ. $\left[\log\frac{a^2}{b}\right]=-3$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

ㄷ. a는 한 자리 자연수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

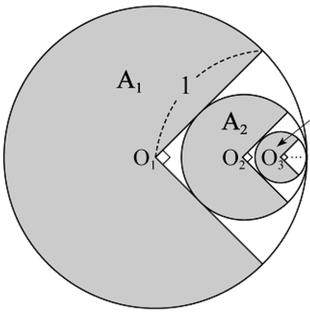
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=5$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=5$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n b_n \neq 0$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

20. 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에서 서로 수직인 두 반지름을 그어 중심각의 크기가 각각 $270°$, $90°$인 부채꼴 A_1, B_1을 만든 후, 부채꼴 B_1에 내접하는 원 O_2를 그린다.
다시 원 O_2에서 서로 수직인 두 반지름을 그어 중심각의 크기가 각각 $270°$, $90°$인 부채꼴 A_2, B_2를 만든 후, 부채꼴 B_2에 내접하는 원 O_3을 그린다. 이와 같은 과정을 한없이 계속하여 얻어진 부채꼴 A_1, A_2, A_3, … 의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, … 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{(3\sqrt{2}+2)\pi}{8}$
② $\frac{(3\sqrt{2}+3)\pi}{8}$
③ $\frac{(3\sqrt{2}-1)\pi}{4}$
④ $\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{4}$
⑤ $\frac{(3\sqrt{3}+2)\pi}{8}$

21. 한 스카이다이버가 고도 $3300m$인 비행기에서 뛰어내렸는데 그가 뛰어내린 후 경과시간 t(초)와 그의 고도(m)는 아래 표와 같았다. 이 스카이다이버가 고도 $800m$인 지점에서 낙하산을 펼쳤다면 그 때까지 경과한 시간은? (단, 낙하산을 펼 때까지 아래 표와 같은 규칙을 따른다고 가정한다.) [3점]

t (초)	1	2	3	4	5	…
고도(m)	3296	3284	3264	3236	3200	…

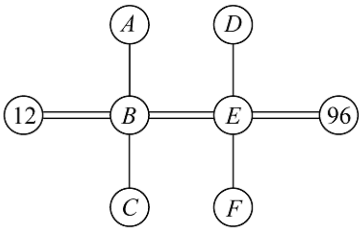
① 17 초 ② 19 초 ③ 21 초
④ 23 초 ⑤ 25 초

단답형(22 ~ 30)

22. 수열 x, y, z, w, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, … 에서 넷째 항부터 각 항은 바로 왼쪽의 연속한 세 항의 합과 같다. 이때 x^4의 값을 구하시오. [3점]

23. 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-2}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 그림에서 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$는 실수이고 한 줄(──)로 연결된 수들은 그 순서로 등차수열을 이루고 두 줄(══)로 연결된 수들은 그 순서로 등비수열을 이룬다.
이때 $A+B+C+D+E+F$의 값을 구하시오. [3점]



25. 단위행렬의 실수배가 아닌 이차정사각행렬 A에 대하여 $(A+E)^2=3A+2E$가 성립하면 $(A+E)^3=aA+bE$이다. 두 실수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

26. 아래 계산기는 화면에 양수 x가 나타나 있는 상태에서 $\boxed{\mathrm{D}(2^x)}$ 키를 한 번 누르면 2^x의 정수 부분의 자리수를 화면에 나타낸다.
화면에 100이 나타나 있는 상태에서 $\boxed{\mathrm{D}(2^x)}$ 키를 연속하여 두 번 눌렀을 때 화면에 나타나는 수를 구하시오.
(단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [4점]

27. $\log 2$가 무리수임을 이용하여 등식 $a\log 20 + \dfrac{b}{\log_8 100} + 3 = 0$을 만족시키는 유리수 $a,\ b$의 값을 정할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점]

28. 자연수 n에 대하여 이차방정식

$$x^2+(\sqrt{n}+1)x-\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{3}{4}=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

29. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고 $na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k\ (n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 어떤 회사에서 판매하는 두 현미경 A, B는 각각 1단계에서 10단계까지 확대 비율을 조절할 수 있다. n단계에서 물체의 길이를 M배 확대해서 볼 수 있다고 할 때, 다음 표는 두 현미경 A, B의 n, M 사이의 관계식을 나타낸 것이다.

현미경	관계식
A	$n=\log_{2\sqrt{2}}M$
B	$n=\log_4 M$

A B

길이가 x 마이크로미터인 물체를 현미경 A로 6단계에서 보고 길이가 y 마이크로미터인 물체를 현미경 B로 7단계에서 보았더니 두 물체의 확대된 길이가 서로 같았다. 이때 $\frac{x}{y}$의 값을 구하시오. (단, $n=1, 2, 3, \cdots, 10$이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.