

수리 영역 (나형)

제 2 교시

성명

수험번호

						2				
--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

1

- 먼저 수험생이 선택한 과목의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일' 에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0' 이 포함되면 그 '0' 도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점 또는 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

3. 임의의 두 양의 실수 a, b 에 대하여 두 연산 \odot, \diamond 를 다음과 같이 정의한다.

$$a \odot b = a^b b^a, \quad a \diamond b = \log_2 ab$$

이 때, $(4 \odot 2) \diamond \frac{1}{2}$ 의 값은? [3점]

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

1. $3^{\log_3 5} + \log_2 32$ 의 값은? [2점]

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

2. 0이 아닌 정수 n 에 대하여 $9^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은? [2점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

4. $\log_{10} 30$ 의 가수를 α 라 할 때, $10^\alpha + 10^{-\alpha}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$
- ② $\frac{4}{3}$
- ③ 2
- ④ $\frac{8}{3}$
- ⑤ $\frac{10}{3}$

5. 거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?
(단, $a > 0, a \neq 1$) [3점]

<보기>

$\neg. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{a}$ $\neg. (\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[12]{a}$ $\neg. \sqrt[3]{a^2} \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^5}$
--

- ① \neg
- ② \neg
- ③ \neg, \neg
- ④ \neg, \neg
- ⑤ \neg, \neg, \neg

6. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 5^n - 1$ 일 때, a_{21} 은 몇 자리 정수인가? (단, $\log_{10} 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [3점]

- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 18
- ⑤ 19

7. $a_1 = 2, a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ (단, $n \geq 2$)로 정의된 수열

$\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{11} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 2^{10}
- ② 2^{11}
- ③ 2^{12}
- ④ 2^{13}
- ⑤ 2^{14}

8. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬이다.) [3점]

<보기>

$\neg. AB = O \text{이면 } A = O \text{ 또는 } B = O \text{이다.}$ $\neg. A^2 = O \text{이면 } E - A \text{의 역행렬은 } E + A \text{이다.}$ $\neg. (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ 이면 } AB = BA \text{이다.}$
--

- ① \neg
- ② \neg
- ③ \neg, \neg
- ④ \neg, \neg
- ⑤ \neg, \neg, \neg

9. 표는 어느 고등학교의 방과 후 학교에 개설된 발명반과 요리반 강좌에 대한 A, B 반 학생들의 수강 인원 및 비용을 나타낸 것이다.

강좌 반	발명반	요리반
A	a	b
B	c	d

비용 강좌	수강료	재료비
발명반	e	f
요리반	g	h

위의 표를 각각 행렬 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ 로 나타낼 때, 두 행렬의 곱 PQ 의 (1, 2)성분이 나타내는 것은? [3점]

- ① A반 학생들의 발명반의 수강료의 총합
- ② A반과 B반 학생들의 요리반의 재료비의 총합
- ③ A반 학생들의 발명반과 요리반의 재료비의 총합
- ④ B반 학생들의 발명반과 요리반의 재료비의 총합
- ⑤ B반 학생들의 발명반과 요리반의 수강료의 총합

10. 양의 실수 a, b 는 다음 조건을 만족시킨다.

I. a 는 정수 부분이 세 자리인 수이다.
 II. $\log_{10} b$ 의 지표는 -1 이다.

이 때, ab 의 값의 범위는? [3점]

- ① $1 \leq ab < 10^2$
- ② $10 \leq ab < 10^3$
- ③ $10^2 \leq ab < 10^4$
- ④ $10^3 \leq ab < 10^5$
- ⑤ $10^4 \leq ab < 10^6$

11. $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, $\log_5 12$ 를 a 와 b 의 식으로 나타낸 것은? [3점]

- ① $\frac{2a+b}{1+a}$
- ② $\frac{2a+b}{1-a}$
- ③ $\frac{3a-b}{1+a}$
- ④ $\frac{3a+b}{1-a}$
- ⑤ $\frac{a-3b}{1+a}$

12. 100의 모든 양의 약수들을 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 할 때, $\log_{10} a_1 + \log_{10} a_2 + \log_{10} a_3 + \dots + \log_{10} a_9$ 의 값은? [4점]

- ① 9
- ② 10
- ③ 11
- ④ 12
- ⑤ 13

13. 모든 자연수 n 에 대하여

‘ $2^{3^n} + 1$ 은 3^{n+1} 으로 나누어떨어진다.’ ... ㉠
이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

(i) $n=1$ 일 때,

$2^3 + 1$ 은 3^2 으로 나누어떨어지므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$ 일 때,

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = \left(\boxed{\text{(가)}} \right) \{ (2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1 \}$$

에서 2^{3^k} 은 3으로 나누면 나머지가 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고

$(2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1$ 을 3으로 나누면 나머지는

$\boxed{\text{(다)}}$ 이므로

$2^{3^{k+1}} + 1$ 은 3^{k+2} 으로 나누어떨어진다.

따라서, $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$2^{3^k} - 1$	0	1
②	$2^{3^k} - 1$	0	2
③	$2^{3^k} + 1$	1	0
④	$2^{3^k} + 1$	2	1
⑤	$2^{3^k} + 1$	2	0

14. 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 B 가 $ABA^{-1} = A$ 를 만족시킬 때, 행렬 $A+B$ 는? (단, A^{-1} 은 A 의 역행렬이다.) [3점]

① $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

15. 모든 실수 x 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x-a & 2x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖기 위한 상수 a 의 값의 범위는? [4점]

① $-5 < a < 0$

② $-4 < a < 1$

③ $1 < a < 5$

④ $a < 1$ 또는 $a > 5$

⑤ $a < -4$ 또는 $a > 1$

16. 첫째항이 3이고 공비가 9인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_n = 3^{k_n}$ 을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 b_{10} 은? [4점]

① 19

② 20

③ 21

④ 22

⑤ 23

6

수리 영역 (나형)

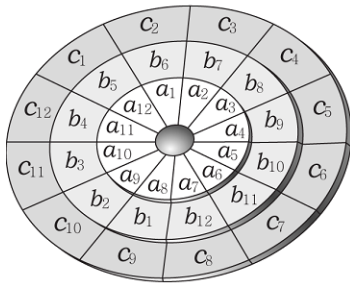
21. 다음과 같은 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 이 있다.

- 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항 a_1 이 5이고 공차는 2이다.
- 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항 b_1 이 2이고 공차는 3이다.
- 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항 c_1 이 28이고 공차는 -2 이다.

$a_i(i=1, 2, \dots, 12)$, $b_j(j=1, 2, \dots, 12)$, $c_k(k=1, 2, \dots, 12)$ 가 시계방향 순서대로 적혀 있는 크기가 서로 다른 세 개의 원판이 있다.

각각의 원판은 같은 중심을 축으로 자유롭게 따로따로 회전하도록 되어 있으며, 세 개의 원판이 회전하다가 모두 멈추었을 때는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 의 각각의 항을 구분하는 직선들은 반드시 일직선상에 놓이게 된다고 하자.

그림은 세 개의 원판이 모두 멈추었을 때, 세 개의 항 a_2 , b_7 , c_3 이 일렬로 놓인 경우의 예이다.



위의 세 개의 원판들이 회전하다가 모두 멈추었을 때, 세 개의 항 a_i , b_j , c_k 가 일렬로 놓였다면, 일렬로 놓인 세 개의 항 a_i , b_j , c_k 의 합 $a_i + b_j + c_k$ 의 최소값은? [4점]

- ① 10
- ② 12
- ③ 15
- ④ 17
- ⑤ 19

단답형 (22 ~ 30)

22. 첫째항이 10, 공차가 7인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 50보다 크게 되는 것은 k 번째항이다. 이 때, k 의 값을 구하시오. [2점]

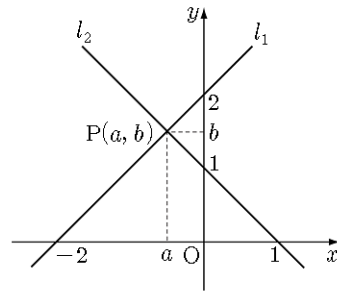
23. 실수 x, y 에 대하여 $\begin{pmatrix} 1 & x+y \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & xy \end{pmatrix}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. $\sum_{k=1}^{10} (2k+5)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 세 수 $-8, x, y$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고 세 수 $x, y, 64$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x+y$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 연립방정식 $\begin{cases} ax+2y=0 \\ 8x+by=0 \end{cases}$ 이 $x=y=0$ 이외의 해를 가질 때, $\log_2 a + \log_2 b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 양의 실수이다.) [3점]

27. 그림과 같이 두 직선 l_1, l_2 가 점 P 에서 만난다. 두 직선의 교점 $P(a, b)$ 를 행렬을 이용하여 구하면, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다. 이 때, 이차정사각행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점]

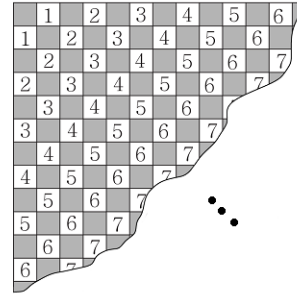


28. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하시오. (단, $A^{n+1} = A^n A$) [4점]

29. $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} - a_n = 2n (n \geq 1)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{10} = 100$ 일 때, α 의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 배열된 숫자 판이 있다. 흰색 부분에 적혀 있는 모든 수를 작은 수부터 차례대로 나열하여 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, ...와 같은 수열 $\{a_n\}$ 을 만들 때, a_{2006} 을 구하시오. [4점]



※ 확인사항

- 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.