2006학년도 11월 고2 전국연합학력평가 문제지

수리 영역 (가형)

제 2 교시 | 성명 | | 수험번호 | | | | | | | 2 | | | | | 1

- 먼저 수험생이 선택한 과목의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. $3^{\log_3 5}+\log_2 32$의 값은? [2점]

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

2. 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [2점]

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

3. 임의의 두 양의 실수 a, b에 대하여 두 연산 ◉, ◈를 다음과 같이 정의한다.

$$a ◉ b = a^b b^a, \quad a ◈ b = \log_2 ab$$

이 때, $(4 ◉ 2) ◈ \frac{1}{2}$의 값은? [3점]

① 1
② 3
③ 5
④ 7
⑤ 9

4. $\log_{10}30$의 가수를 α라 할 때, $10^{\alpha}+10^{-\alpha}$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$
② $\frac{4}{3}$
③ 2
④ $\frac{8}{3}$
⑤ $\frac{10}{3}$

수리 영역 (가형)

5. 거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, $a>0$, $a\neq 1$) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{a}$

ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[12]{a}$

ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a^5}$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=5^n-1$일 때, a_{21}은 몇 자리 정수인가? (단, $\log_{10}2=0.3010$으로 계산한다.) [3점]

① 15
② 16
③ 17
④ 18
⑤ 19

7. $a_1=2$, $a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$(단, $n\geq 2$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{11}a_k$의 값은? [3점]

① 2^{10}
② 2^{11}
③ 2^{12}
④ 2^{13}
⑤ 2^{14}

8. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $AB=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$이다.

ㄴ. $A^2=O$이면 $E-A$의 역행렬은 $E+A$이다.

ㄷ. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 표는 어느 고등학교의 방과 후 학교에 개설된 발명반과 요리반 강좌에 대한 A, B반 학생들의 수강 인원 및 비용을 나타낸 것이다.

(단위:명)

강좌 / 반	발명반	요리반
A	a	b
B	c	d

(단위:원)

비용 / 강좌	수강료	재료비
발명반	e	f
요리반	g	h

위의 표를 각각 행렬 $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 두 행렬의 곱 PQ의 $(1, 2)$성분이 나타내는 것은? [3점]

① A반 학생들의 발명반의 수강료의 총합
② A반과 B반 학생들의 요리반의 재료비의 총합
③ A반 학생들의 발명반과 요리반의 재료비의 총합
④ B반 학생들의 발명반과 요리반의 재료비의 총합
⑤ B반 학생들의 발명반과 요리반의 수강료의 총합

10. 양의 실수 a, b는 다음 조건을 만족시킨다.

Ⅰ. a는 정수 부분이 세 자리인 수이다.
Ⅱ. $\log_{10} b$의 지표는 -1이다.

이 때, ab의 값의 범위는? [3점]

① $1 \leqq ab < 10^2$
② $10 \leqq ab < 10^3$
③ $10^2 \leqq ab < 10^4$
④ $10^3 \leqq ab < 10^5$
⑤ $10^4 \leqq ab < 10^6$

11. 수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 100의 모든 양의 약수들을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 할 때, $\log_{10} a_1 + \log_{10} a_2 + \log_{10} a_3 + \cdots + \log_{10} a_9$의 값은? [4점]

① 9
② 10
③ 11
④ 12
⑤ 13

13. 모든 자연수 n에 대하여

'$2^{3^n}+1$은 3^{n+1}으로 나누어떨어진다.' … ㉠

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

(ⅰ) $n=1$일 때,

2^3+1은 3^2으로 나누어떨어지므로 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때,

$2^{3^{k+1}}+1=\left(2^{3^k}\right)^3+1=\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\left\{\left(2^{3^k}\right)^2-2^{3^k}+1\right\}$

에서 2^{3^k}은 3으로 나누면 나머지가 $\boxed{\text{(나)}}$이고

$\left(2^{3^k}\right)^2-2^{3^k}+1$을 3으로 나누면 나머지는

$\boxed{\text{(다)}}$이므로

$2^{3^{k+1}}+1$은 3^{k+2}으로 나누어떨어진다.

따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

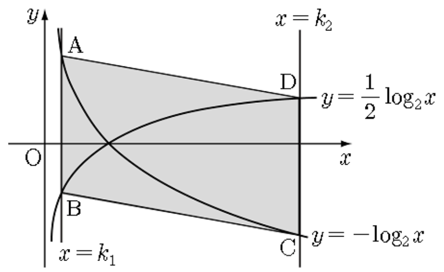
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$2^{3^k}-1$	0	1
②	$2^{3^k}-1$	0	2
③	$2^{3^k}+1$	1	0
④	$2^{3^k}+1$	2	1
⑤	$2^{3^k}+1$	2	0

14. 그림과 같이 두 곡선 $y=-\log_2 x$와 $y=\dfrac{1}{2}\log_2 x$가 있다. 직선 $x=k_1$이 두 곡선과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k_2$가 두 곡선과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CD}}=3$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? (단, $0<k_1<1<k_2$) [4점]



① $\dfrac{45}{4}$

② $\dfrac{25}{2}$

③ $\dfrac{55}{4}$

④ $\dfrac{65}{4}$

⑤ $\dfrac{35}{2}$

15. 모든 실수 x에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x-a & 2x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는? [4점]

① $-5<a<0$
② $-4<a<1$
③ $1<a<5$
④ $a<1$ 또는 $a>5$
⑤ $a<-4$ 또는 $a>1$

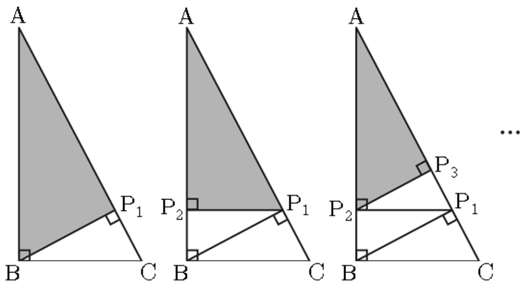
16. [그림 1]과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=1$인 직각삼각형 ABC의 꼭지점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 P_1, $\triangle \mathrm{ABP}_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

[그림 2]와 같이 직각삼각형 $\triangle \mathrm{ABP}_1$의 꼭지점 P_1에서 대변 AB에 내린 수선의 발을 P_2, $\triangle \mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2$의 넓이를 S_2라 하자.

[그림 3]과 같이 직각삼각형 $\triangle \mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2$의 꼭지점 P_2에서 대변 AP_1에 내린 수선의 발을 P_3, $\triangle \mathrm{AP}_2\mathrm{P}_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 $\triangle \mathrm{AP}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은? (단, $\mathrm{B}=\mathrm{P}_0$) [4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① 4
② 5
③ 6
④ 7
⑤ 8

17. [그림 1]은 가로와 세로가 각각 20개의 칸으로 되어 있는 정사각형에 1부터 400까지의 자연수를 차례로 써 넣은 것이다.

	1열 ⇩	2열 ⇩	3열 ⇩	⋯	20열 ⇩
1행 ⇨	1	2	3	⋯	20
2행 ⇨	21	22	23	⋯	40
3행 ⇨	41	42	43	⋯	60
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20행 ⇨	381	382	383	⋯	400

[그림 1]

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~⋯~~	20
21	~~22~~	23	⋯	~~40~~
~~41~~	42	~~43~~	~~⋯~~	~~60~~
⋮	~~⋮~~	⋮	⋮	~~⋮~~
381	~~382~~	383	⋯	~~400~~

[그림 2]

[그림 1]에서 각각의 행과 열에 대하여 중복되거나 빠지지 않게 각 행마다 한 개씩 수를 선택하고자 한다. 예를 들어 1행의 20과 3행의 42가 이미 선택되었다면, 다른 행의 수를 선택할 때에는 [그림 2]와 같이 20과 42가 포함된 행과 열의 어떤 수도 선택할 수 없다.

이와 같이 20개의 수들을 선택할 때, 선택되어진 수들의 합은? [4점]

① 2090
② 3030
③ 3070
④ 4010
⑤ 4050

18. 방정식 $\log_2 x + 8\log_x \sqrt{2} = 5$를 만족하는 모든 실근의 곱은? (단, $x \neq 1$, $x > 0$) [3점]

① 24
② 32
③ 40
④ 48
⑤ 56

19. 다음은 자연수 n에 대하여 $A^{n+2}-3A^{n+1}+2A^{n}=O$을 만족하고 역행렬이 존재하며 단위행렬의 실수배가 아닌 이차정사각행렬 A에 대하여 A^{m}을 A와 E로 나타내는 과정이다.
(단, $m \geq 2$인 자연수이고, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

> $A^{n+2}-3A^{n+1}+2A^{n}=O$에서
> $A^{n+2}-A^{n+1}=2(A^{n+1}-A^{n})$이므로
> $A^{n+1}-A^{n}=\boxed{\text{(가)}}(A-E)$ … ㉠
> 이 때, ㉠의 n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, m-1$을 차례대로 대입하면
> $$A^{2}-A=2(A-E)$$
> $$A^{3}-A^{2}=2^{2}(A-E)$$
> $$\vdots$$
> $$A^{m}-A^{m-1}=2^{m-1}(A-E)$$
> 이다.
> 위 식들의 좌변과 우변을 변변 더하면
> $$A^{m}-A=\left(\boxed{\text{(나)}}\right)(A-E)$$
> 따라서 $A^{m}=\left(\boxed{\text{(다)}}\right)A-\left(\boxed{\text{(나)}}\right)E$

위의 과정에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	2^{n-1}	$2^{m}-1$	2^{m}
②	2^{n-1}	$2^{m}-2$	$2^{m}-1$
③	2^{n}	$2^{m}+1$	$2^{m}+2$
④	2^{n}	$2^{m}-2$	$2^{m}-1$
⑤	2^{n}	$2^{m}-2$	2^{m}

20. 서로 다른 세 종류의 음료수 A, B, C가 있다. A가 3개, B가 2개, C가 1개 있을 때, 이 6개의 음료수 중에서 5명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 음료수끼리는 구별하지 않는다.) [4점]

① 40
② 45
③ 50
④ 55
⑤ 60

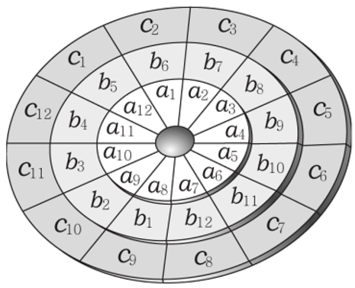
21. 다음과 같은 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 있다.

> ○ 수열 $\{a_n\}$은 첫째항 a_1이 5이고 공차는 2이다.
> ○ 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 b_1이 2이고 공차는 3이다.
> ○ 수열 $\{c_n\}$은 첫째항 c_1이 28이고 공차는 -2이다.

$a_i\,(i=1, 2, \cdots, 12)$, $b_j\,(j=1, 2, \cdots, 12)$, $c_k\,(k=1, 2, \cdots, 12)$가 시계방향 순서대로 적혀 있는 크기가 서로 다른 세 개의 원판이 있다.

각각의 원판은 같은 중심을 축으로 자유롭게 따로따로 회전하도록 되어 있으며, 세 개의 원판이 회전하다가 모두 멈추었을 때는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$의 각각의 항을 구분하는 직선들은 반드시 일직선상에 놓이게 된다고 하자.

그림은 세 개의 원판이 모두 멈추었을 때, 세 개의 항 a_2, b_7, c_3이 일렬로 놓인 경우의 예이다.



위의 세 개의 원판들이 회전하다가 모두 멈추었을 때, 세 개의 항 a_3, b_2, c_{12}가 일렬로 놓였다면, 일렬로 놓인 세 개의 항 a_i, b_j, c_k의 합 $a_i+b_j+c_k$의 최소값은? [4점]

① 10
② 12
③ 15
④ 17
⑤ 19

단답형 (22 ~ 30)

22. 두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=\frac{3}{2}\log_3 x$에 대하여 $f(g(9))$의 값을 구하시오. [2점]

23. 실수 x, y에 대하여 $\begin{pmatrix} 1 & x+y \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & xy \end{pmatrix}$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오. [3점]

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{\sqrt{4n^2-1}}=7$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

25. 세 부등식 $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $\log_5 x+\log_5 y \leqq 1$을 동시에 만족하는 점 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최대값을 M, 최소값을 m이라 할 때, $\mathrm{M}+m$의 값을 구하시오. [3점]

26. 방정식 $2\cdot 4^x-17\cdot 2^x+32=0$을 만족시키는 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

27. $(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+\cdots+(x+1)^{12}$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [4점]

28. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n을 $|x|+|y|=n$으로 둘러싸인 좌표평면 위의 도형의 넓이라고 하자. 이 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{a_n a_{n+1}}$의 합을 구하시오. [4점]

29. $10<a<b<c<d<20$를 만족하는 자연수 a, b, c, d에 대하여 집합 S를 $S=\{a, b, c, d\}$로 나타낼 때, 집합 S의 개수를 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 산 아래에 있는 매표소에서 산 중턱에 있는 약수터까지 오르는 등산로가 5개, 산 중턱에 있는 약수터에서 산 정상까지 오르는 등산로가 4개 있다. 어느 등산객이 매표소에서 약수터를 지나 산 정상에 오른 후, 다시 약수터를 지나 매표소까지 내려오는 경우의 수를 구하시오. (단, 올라갈 때 이용한 등산로로는 내려오지 않기로 한다.) [4점]

※ **확인사항**

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.