2016학년도 경찰대학 1차시험 (수 학)

※ 총 4쪽 25문항입니다.

[1~20] 각 문항의 답을 하나만 고르세요.

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A+A^2+A^3+\cdots+A^n$의 $(1,2)$성분이 -1488일 때, 자연수 n의 값은? [3점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

2. 유리수 a, b, x, y에 대하여 두 등식 $(2+\sqrt{3})^{100}=a+b\sqrt{3}$, $(2+\sqrt{3})^{101}=x+y\sqrt{3}$이 성립한다고 하자. $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$를 x, y와 a, b에 관한 관계식으로 나타낸 것이라 할 때 행렬 A를 구하면? [3점]

① $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

3. 어느 도시에서 운전면허증을 소지한 사람이 지난 10년간 교통법규를 위반한 건수는 평균 5건, 표준편차 1건인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시에서 운전면허증을 소지한 사람 중에서 임의추출한 100명이 지난 10년간 교통법규를 위반한 건수의 평균이 4.85건 이상이고 5.2건 이하일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하면? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8664 ② 0.9104 ③ 0.9544 ④ 0.9710 ⑤ 0.9876

4. x에 대한 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β가 $\alpha+\beta=\alpha\beta$를 만족한다고 하자. 이차방정식 $f(x-1)=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때 $\gamma^2+\delta^2$의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$라 할 때, $f(\omega)f(\omega^2)f(\omega^{2^2})f(\omega^{2^3})\cdots f(\omega^{2^{2016}})$의 값은? [4점]

① -1 ② 1 ③ ω ④ $\dfrac{1}{\omega}$ ⑤ $-\omega-1$

6. 방정식 $\sqrt{2016}\,x^{\log_{2016}x}=x^2$의 해의 곱을 N이라 할 때, N의 마지막 두 자리를 구하면? [4점]

① 16 ② 36 ③ 56 ④ 76 ⑤ 96

7. 어떤 프로파일러가 사람을 면담한 후 범인 여부를 판단할 확률이 다음과 같다.

- 범행을 저지른 사람을 범인으로 판단할 확률은 0.99이다.
- 범행을 저지르지 않은 사람을 범인으로 판단할 확률은 0.04이다.

이 프로파일러가 범행을 저지른 사람 20명과 범행을 저지르지 않은 사람 80명으로 이루어진 집단에서 임의로 한 명을 선택하여 면담하였을 때, 이 사람을 범인으로 판단할 확률은? [4점]

① 0.2 ② 0.21 ③ 0.22 ④ 0.23 ⑤ 0.24

8. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X^2)=40$, $\mathrm{E}(3X+1)=19$일 때, $\dfrac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{4}{17}$ ② $\dfrac{7}{17}$ ③ $\dfrac{10}{17}$ ④ $\dfrac{13}{17}$ ⑤ $\dfrac{16}{17}$

9. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}|a_n|-1$, $a_1=1$, $b_n=a_{n+1}+\dfrac{2}{3}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르면? [4점]

<보기>

ㄱ. $n \geq 2$ 이면 $a_n<0$ 이다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-2$

ㄷ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\dfrac{1}{9}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

10. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고 $f(x)=2-|x-1|$ $(0 \leq x < 2)$이다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 $y=\log_n x$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=2}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 250 ② 270 ③ 290 ④ 310 ⑤ 330

11. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 다항함수 $f(x)$가 $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(1)-f(-x)}{x^2-1}=3$을 만족시킬 때 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\{f(x)\}^2-4}{x+1}$의 값은? [4점]

① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

12. 삼차함수 $f(x)=(a-4)x^3+3(b-2)x^2-3ax+2$가 극값을 갖지 않을 때, 좌표평면에서 점 (a,b)가 존재하는 영역을 A라 하고, $B=\{(x,y)\mid mx-y+m=0\}$이라 하자. $A\cap B\neq\varnothing$이기 위한 m의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a,b,m은 실수이다.) [4점]

① $\dfrac{9}{5}$ ② $\dfrac{11}{5}$ ③ $\dfrac{12}{5}$ ④ $\dfrac{13}{5}$ ⑤ $\dfrac{14}{5}$

13. 자연수 n에 대하여 두 조건 $\left[\dfrac{x}{n}\right]=2$, $\left[\dfrac{x}{n+1}\right]=1$을 만족시키는 실수 x 중에서 가장 큰 자연수를 a_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{30} a_n$의 값은? (단, $[t]$는 t보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[4점]

① 955 ② 956 ③ 957 ④ 958 ⑤ 959

14. 10명의 순경이 세 구역을 순찰하려고 한다. 각 구역에는 적어도 한 명이 순찰하고, 각 구역의 순찰 인원은 5명 이하가 되도록 인원수를 정하는 경우의 수는? (단, 한 명의 순경은 하나의 구역만 순찰하고, 순경은 서로 구분하지 않는다.) [4점]

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

15. 함수 f는 임의의 실수 x, y에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$f(1) > 0, \quad f(xy) = f(x)f(y) - x - y$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2$의 값은? [4점]

① 510　② 624　③ 756
④ 832　⑤ 948

16. 다음과 같이 흰 바둑돌 1개와 검은 바둑돌 2개를 왼쪽부터 교대로 반복하여 나열하였다.

○●●○●●○●●○●●○●●……

이 바둑돌을 왼쪽부터 차례로 1개, 2개, 3개, ⋯ 를 꺼내어 각각 제1행, 제2행, 제3행, ⋯ 에 순서대로 놓으면 아래 그림과 같다.

제1행	○
제2행	●●
제3행	○●●
제4행	○●●○
제5행	●●○●●
⋮	⋮

제n행에 놓인 검은 바둑돌의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{50}a_n$의 값은? [4점]

① 830　② 840　③ 850　④ 860　⑤ 880

17. 눈의 수가 1부터 6까지인 주사위를 던져서 눈의 수가 1 또는 6이 나올 때까지 반복한다. 한 번 던지고 중지하면 1000원을 받고, 두 번 던지고 중지하면 2000원을 받는다. 이와 같이 계속하여 n번 던지고 중지하면 $n \times 1000$원을 받을 때, 받는 돈의 기댓값은? [5점]

① 1000원　② 1500원　③ 2000원
④ 2500원　⑤ 3000원

18. 두 수 a, b가 $0 < b < a$를 만족시킬 때, 한 꼭짓점이 (a, b)이고, 다른 두 꼭짓점이 각각 x축과 직선 $y = 2x$에 놓여있는 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값은? [5점]

① $\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2+b^2}$　② $\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2-b^2}$
③ $\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2+4b^2}$　④ $\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{4a^2+b^2}$
⑤ $\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{4a^2-b^2}$

19. $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}} = x$, $\overline{\mathrm{BC}} = x+1$, $\overline{\mathrm{AC}} = x+2$이고 $\angle \mathrm{B} = 2\theta$, $\angle \mathrm{C} = \theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [5점]

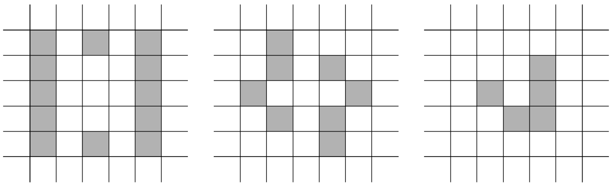
① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{5}{6}$

20. 무한히 확장된 바둑판 모양 격자에서 실행되는 게임을 생각한다. 이전 세대에서 다음 세대로 넘어갈 때 어떤 정사각형이 살아있을 것인가를 결정하는 규칙은 다음과 같다.

- 살아있는 정사각형은 자신을 감싸는 여덟 개의 정사각형 중에서 정확히 두 개 또는 세 개가 살아있다면 다음 세대에서 살아남고, 그렇지 않으면 죽는다.
- 죽어있는 정사각형은 자신을 감싸는 여덟 개의 정사각형 중에서 정확히 세 개가 살아있다면 다음 세대에서 살아나고, 그렇지 않으면 죽은 채로 있다.

그림과 같은 초기 세대의 상태에 대하여, <보기>에서 미래 세대의 상태를 설명한 것 중 옳은 것만을 있는 대로 고르면? (단, 검게 칠해진 정사각형이 살아있는 정사각형이다.) [5점]

(가) (나) (다)



<보기>

ㄱ. (가)의 초기 세대(0세대)에서 다음 세대(1세대)로 넘어간 후 살아남은 정사각형의 개수는 18개이다.
ㄴ. (나)는 몇 세대 후 모든 정사각형이 죽는다.
ㄷ. (다)는 살아남은 정사각형의 위치와 형태가 몇 세대 이후부터는 변하지 않고 고정된다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

[21～25] 각 문항의 답을 답안지에 기재하세요.

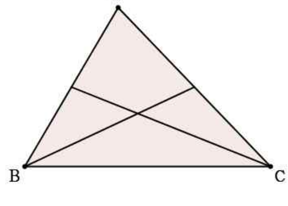
21. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_{13}+a_{15}=72$일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

22. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2|x-t|$ $(-1 \le x \le 1)$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_0^{\frac{3}{2}} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

23. 두 자연수 m, n에 대하여 부등식 $\left|\log_3 \frac{m}{15}\right|+\log_3 \frac{n}{3} \le 0$을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

24. 다항함수 $f(x)=x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)$에 대하여 $f'(-1)=a$이고 $f(x)$의 최솟값이 b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점]

25. 삼각형 ABC에서 $\overline{\text{AB}}$의 n등분 점과 꼭짓점 C를 잇고, $\overline{\text{AC}}$의 n등분 점과 꼭짓점 B를 잇는다. 이때, 만들어지는 삼각형($\triangle$ABC도 포함)의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $n=2$인 다음 그림에서 $a_2=8$이다. a_5의 값을 구하시오. [5점]



※확인사항
▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입・표기 했는지 확인하시오.