



2015학년도 경찰대학 1차시험 (수 학)

※ 총 4쪽 25문항(3점 5문항, 4점 15문항 5점 5문항)입니다. 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

[1~20] 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{2n} A^k$ 의 모든 성분의 합을

a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은? [3점]

- ① 1
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{4}$
- ⑤ $\frac{1}{5}$

2. 자연수 n 에 대하여 다항식 $(x-1)^{2n} + (x+1)^n$ 을 $x-3$ 으로 나눈 나머지를 a_n , $x-1$ 로 나눈 나머지를 b_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 a_n + \log_2 b_n}{n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

3. 5^{25} 은 m 자리의 정수이고 5^{25} 의 최고 자리의 숫자는 n 이다. $m+n$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.)

[3점]

- ① 18
- ② 20
- ③ 22
- ④ 24
- ⑤ 26

4. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 임의로 한 개씩 꺼낼 때, 나중에 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 더 큰 순서로 꺼낼 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

[3점]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{5}$
- ④ $\frac{1}{6}$
- ⑤ $\frac{1}{8}$

5. 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 4$, $\overline{DA} = 6$ 이다. 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

- ① $5\sqrt{2}$
- ② $6\sqrt{2}$
- ③ $7\sqrt{2}$
- ④ $8\sqrt{2}$
- ⑤ $9\sqrt{2}$

6. 함수 $f(n)$ 이 $f(n) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 3x - 4}{x - 1}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값은?

[4점]

- ① 65
- ② 70
- ③ 75
- ④ 80
- ⑤ 85

7. 방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때,

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\alpha)(k-\alpha^2)}$ 의 값은? [4점]

- ① α
- ② $\alpha - 1$
- ③ $1 - \alpha$
- ④ 1
- ⑤ -1

8. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고 O 는 영행렬이다.) [4점]

<보기>

ㄱ. $(A+B)^2 = O$ 이면 $A+B = O$ 이다.
 ㄴ. $A+E = (B+E)^2$ 이면 $AB = BA$ 이다.
 ㄷ. $A^3 + 2A^2 + A = O$ 이면 $A+2E$ 는 역행렬을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

9. 자연수 n 에 대하여 연립일차방정식 $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + (a - 2n)y = 1 \end{cases}$ 의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 전체의 집합을 A_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $(n, n) \notin A_n$
 ㄴ. $(a, b) \in A_n$ 이면 $\sqrt{a^2 + b^2} > 2n$ 이다.
 ㄷ. 서로 다른 두 자연수 m, n 에 대하여 $A_m \cap A_n = \emptyset$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. x 축 위의 점 $A_n(x_n, 0)$ 에 대하여 함수 $f(x) = 4x^2$ 의 그래프 위의 점 $B_n(x_n, f(x_n))$ 에서 접선이 x 축과 만나는 점을 $A_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ 이라 하자. 삼각형 $A_n B_n A_{n+1}$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? (단, $x_1 = 1$) [4점]
- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{8}{7}$

11. 양의 실수 a, b, c 에 대하여 세 조건 $p: ax^2 - bx + c < 0$, $q: \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c < 0$, $r: (x-1)^2 \leq 0$ 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $R \subset P$ 이면 $R \subset Q$ 이다.
 ㄴ. $P \cap Q = \emptyset$ 이면 $R \subset P$ 또는 $R \subset Q$ 이다.
 ㄷ. $P \cap Q \neq \emptyset$ 이면 $R \subset P \cap Q$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. $f(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

13. 15 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 뽑을 때, 어느 두 수도 3 이상 차이가 나도록 뽑는 방법의 수는? [4점]
- ① 108 ② 120 ③ 126 ④ 132 ⑤ 144

14. 함수 $f(x) = \log_2 x + 1$ ($x \geq 1$)에 대하여
 $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, \dots , $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, \dots
 로 나타낼 때 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 [5점]

<보기>

ㄱ. $m < n$ 이면 $f_m(x) \leq f_n(x)$ 이다.
 ㄴ. $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 는 수렴한다.
 ㄷ. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $f_m(x) = f_n(x)$ 이면
 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = n$ 이 두 함수 $y = \log_2 x$,
 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자.
 삼각형 $A_n B_{n-1} B_n$ 과 삼각형 $A_n A_{n-1} B_{n-1}$ 의 넓이를 각각
 S_n, T_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n}$ 의 값은? [4점]
- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

16. 두 집합 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, $B = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$
 에 대하여 (x, y) 가 $A \cap B$ 의 원소일 때, $x + 2y$ 의 최댓값과
 최솟값이 각각 M, m 이다. $M^2 - m$ 의 값은? [4점]
- ① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{41}{4}$ ③ $\frac{83}{8}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{85}{8}$

17. 좌석의 수가 50인 어느 식당에서 예약한 사람이 예약을
 취소하는 경우가 10명 중 1명꼴이라고 한다. 52명이 예약
 했을 때, 좌석이 부족하게 될 확률은 $p \times 0.9^{52}$ 이다. p 의 값
 은? [4점]

- ① $\frac{61}{9}$ ② 7 ③ $\frac{65}{9}$ ④ $\frac{67}{9}$ ⑤ $\frac{23}{3}$

18. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + 1 & (x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ p(x-2)^3 + q(x-2)^2 + r(x-2) + 5 & (x > 1) \end{cases}$$

이고 $g(x) = f'(x)$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하다.
 (나) $g'(0) = g'(2) = 0$

$\int_0^1 f(x) dx$ 의 값은? [5점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

19. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P는 B를
 출발하여 매초 1의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라
 $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 의 방향으로 움직이고, 점 Q는 C를 출발하여
 매초 $\frac{2}{3}$ 의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라
 $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$ 의 방향으로 움직인다. 두 점 P, Q가 각각
 B, C에서 동시에 출발한 후 시간 t 초일 때 삼각형 APQ의
 넓이를 $f(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로
 고른 것은? (단, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$) [5점]

<보기>

ㄱ. $f(t)$ 는 구간 $(0, \frac{3}{2})$ 에서 미분가능하다.
 ㄴ. $f(t)$ 는 $t = \frac{3}{4}$ 에서 극솟값을 갖는다.
 ㄷ. $f(t)$ 는 $t = 1$ 에서 극댓값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 정삼각형 ABC 내부의 점 P로부터 각 꼭짓점까지의 거리가 각각 4, 2, $2\sqrt{3}$ 일 때, 삼각형 ABC의 한 변의 길이는? [5점]
- ① $\sqrt{29}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{26}$ ⑤ 5

23. 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 이 순서대로 등차수열을 이루는 세 자리의 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

[21~25] 각 문항의 답을 답안지에 기재하시오.

21. 방정식 $4x^3 + 1003x + 1004 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(\alpha + \beta)^3 + (\beta + \gamma)^3 + (\gamma + \alpha)^3$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 개의 주사위를 던져 나오는 눈의 수 중 크거나 같은 수를 확률변수 X 라 할 때, $E(6X) = \frac{p}{q}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수) [4점]

22. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 내접하는 정96각형의 각 꼭짓점의 좌표를 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{96}, b_{96})$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{96} a_n^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. 직선 l 이 함수 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 3$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 접할 때, 직선 l 과 곡선 $y = f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이가 A 이다. $30A$ 의 값을 구하시오. [5점]

※ 확인사항

▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입·표기했는지 확인하시오.