2012학년도 경찰대학 1차시험 (수리영역)

※ 총 4쪽 25문항입니다. 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $x^2+y^2+z^2=2$ 일 때, $(x+y+z)^{12}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

2. 다음 두 조건을 만족시키는 집합 A와 B의 순서쌍 (A,B)의 개수는?

(가) A와 B는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$의 부분집합이다.
(나) $A-B=\{1, 3, 5\}$

① 17 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 31

3. x에 대한 일차방정식 $a(ax-1)-(x+1)=0$이 근을 갖지 않을 때, $x^2-(4a-1)x-5a+1=0$의 두 근 α, β에 대해 $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

4. 7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 중 서로 다른 4개를 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 25의 배수가 되는 경우의 수는?

① 48 ② 52 ③ 56
④ 60 ⑤ 64

5. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x-x^2)-f(0)}{x}=\frac{1}{3}$$

일 때, $f'(0)$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

6. 실수 x, y에 대하여 $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{13}=x+yi$ 가 성립할 때, $|x|+|y|$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\frac{1}{2^8}$ ② $\frac{1}{2^7}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2^7}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2^6}$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{3}}{2^6}$

7. 방정식 $\sqrt{15}\,x^{\log_{15}x}=x^2$ 의 모든 실근의 곱은?

① 15 ② 15^2 ③ 30
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\sqrt{15}$

8. 역행렬이 존재하는 행렬 X에 대하여 $f(X)=X+X^{-1}$이라 하자. 행렬 A가

$$A^2+A+E=O$$

을 만족할 때, $f(A)f(A^{2^1})f(A^{2^2})\cdots f(A^{2^{13}})$의 값은? (단, E는 단위행렬, O은 영행렬이다.)

① E ② $-E$ ③ O

④ A ⑤ $A-A^{-1}$

9. 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}4x-3 & (0\le x<1)\\ ax^2+bx & (1\le x\le 2)\end{cases}\quad (\text{단, } a,\ b\text{는 상수})$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{3}$ ⑤ 6

10. 곡선 $f(x)=-x^3-x^2+x+1$과 x축으로 둘러싸인 영역 $A=\{(x, y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le f(x)\}$에서 $3x+4y$의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 8

11. x에 대한 이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$이 다음 두 조건을 만족시킬 때, $a+2b+3c$의 값은?

(가) a, b, c는 한 자리의 자연수이다.
(나) 두 근 α, β에 대하여 $1<\alpha<2, 5<\beta<6$이다.

① 16 ② 24 ③ 32

④ 40 ⑤ 48

12. 이산확률변수 X는 1, 2, 3,…, 90의 값을 가질 때, 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=a\cos^2(x^\circ)\ (\text{단, } a\text{는 상수})$$

이다. 이때, 확률 $P(30\le X\le 60)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{31}{89}$ ③ $\frac{31}{90}$

④ $\frac{62}{89}$ ⑤ $\frac{31}{45}$

13. 점 A_n의 좌표가 $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos\frac{n\pi}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^n\sin\frac{n\pi}{3}\right)$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}$의 값은?

① $\frac{3\sqrt{13}}{4}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\frac{5\sqrt{13}}{4}$

④ $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{4}$

14. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_{n+1} = n(-1)^n - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의한다. $a_1 = a_{2012} + 2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2011} a_n$ 의 값은?

① 501 ② 351 ③ 251
④ -251 ⑤ -501

15. 경찰대학 체력측정에서 참가자의 약 94% (오차의 한계 0.5%)가 정해진 기준을 만족시켰다고 한다. 이때, 가능한 참가자 수의 최솟값은?

① 12 ② 13 ③ 16
④ 18 ⑤ 25

16. 두 수 2^n과 5^n의 최고 자릿수가 a로 같아지도록 하는 자연수 n과 a에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a \cdot 10^p < 2^n < (a+1) \cdot 10^p$인 자연수 p가 있다.
ㄴ. $a^2 < 10^r < (a+1)^2$인 자연수 r가 있다.
ㄷ. a의 값이 7이 되도록 하는 n이 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

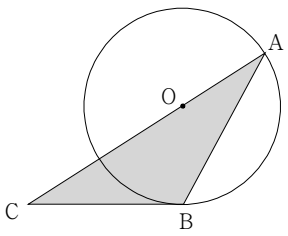
17. 좌표평면에서 $y \geq 4x^2 + 2px - 9$가 나타내는 영역을 A라 하고, A를 원점에 대하여 대칭이동한 영역을 B라 할 때, $A \cap B$의 넓이는? (단, p는 상수이다.)

① 9 ② 18 ③ 36
④ $24\sqrt{3}$ ⑤ 72

18. 자연수 n을 삼진법으로 나타내어 $(a_k a_{k-1} \cdots a_1)_{(3)}$이라 할 때, $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j}$를 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{80} b_n$의 값은?

① $\frac{81}{4}$ ② $\frac{80}{3}$ ③ 27
④ 40 ⑤ $\frac{81}{2}$

19. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 A에 대하여 $\sin(\angle OAB) = \frac{1}{3}$이 되도록 원 위에 점 B를 잡는다. 점 B에서의 접선과 선분 AO의 연장선이 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는?



① $\frac{24}{7}\sqrt{2}$ ② $\frac{26}{7}\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\frac{30}{7}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{32}{7}\sqrt{2}$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2-10x-5=ax+b$가 두 양의 실근 α, β를 갖도록 하는 정수 a의 최솟값을 p라 하고, 그때의 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 q라 하자. p와 q의 곱 pq의 값은?

① -9 ② -10 ③ -5

④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -18

21. $\{(x, y) | y \geq 4x^2 - 2ax + a, y \leq -4x^2 + 3a\}$가 공집합이 되지 않도록 하는 실수 a의 범위는?

① $a \leq -16$, $a \geq 0$ ② $-16 \leq a \leq 0$

③ $a \leq -12$, $a \geq 0$ ④ $-12 \leq a \leq 0$

⑤ $a \leq -8$, $a \geq 0$

22. 각 자릿수의 계승의 합이 자신과 같은 수의 집합을 M이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (예를 들어, $1!+2!+3!=9$는 123과 다르므로 123은 M의 원소가 아니다.)

<보 기>

ㄱ. 두 자리의 자연수는 M의 원소가 될 수 없다.

ㄴ. M의 원소인 세 자리 자연수의 각 자릿수는 7보다 작다.

ㄷ. M에는 8자리 이상의 자연수가 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 각각 들어 있는 두 상자 A, B가 있다. A, B에서 임의로 각각 4개의 공을 동시에 뽑아 네 자리 자연수 a, b를 만든다. 이때, a와 b를 서로 같은 자리의 수끼리 비교하였을 때, 어느 자리의 수도 서로 같지 않을 확률은?

① $\frac{49}{120}$ ② $\frac{17}{40}$ ③ $\frac{53}{120}$

④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{19}{40}$

24. 곡선 $f(x)=x^4-3x^2+6x+1$ 위의 서로 다른 두 점에서 접하는 직선의 방정식은?

① $y=6x-\frac{5}{4}$ ② $y=3x-\frac{5}{2}$ ③ $y=6x+\frac{5}{4}$

④ $y=3x+\frac{5}{4}$ ⑤ $y=3x+\frac{5}{2}$

25. 자연수 n에 대하여 수직선 위의 점 $A_n(x_n)$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a의 값의 합은?

(가) $x_1=1$, $x_2=a$ (단, a는 자연수)

(나) A_{n+2}는 선분 A_nA_{n+1}을 $1-t:t$로 내분하는 점이다. (단, $0<t<1$)

(다) $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값이 정수가 되게 하는 실수 t의 개수는 11이다.

① 45 ② 47 ③ 49

④ 51 ⑤ 53

※확인사항

▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입·표기했는지 확인하시오.